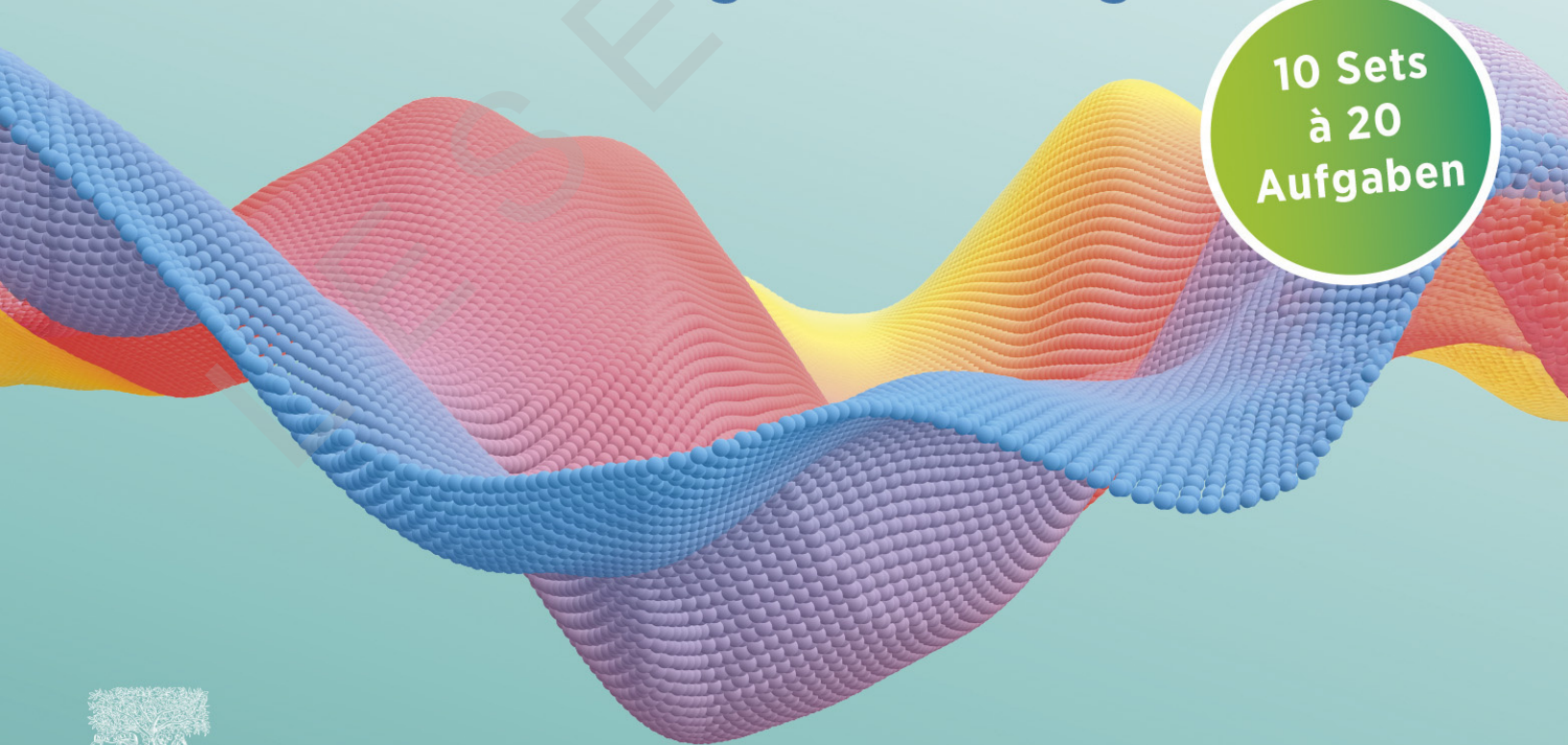
TMSnat

T. Wiegand • L. Froschauer • C. Lutz • C. Plumeyer

Band 4

Quantitative und formale Probleme – Arbeitsbuch mit Strategie und Lösungen



PROBE

ELSEVIER

MEDIZIN STUDIEREN MIT ELSEVIER!

Urban & Fischer

KAPITEL

1 Einführung

Tim Wiegand, Leon Froschauer, Constantin Lutz

Umfang des Aufgabenteils „Quantitative und formale Probleme“:
20 Aufgaben, 50 Minuten

1.1 Aufgabenart

Im Aufgabenteil *Quantitative und formale Probleme* werden Fähigkeiten im Umgang mit mathematisch orientierten Aufgaben getestet. Bei der Bearbeitung muss jedoch auf jede Rechenhilfe, z. B. in Form eines Taschenrechners, verzichtet werden.
Es gibt verschiedene Typen von Aufgaben, die immer wieder gestellt werden, sodass nach etwas Übung ein großer Teil der Aufgabentypen im Groben bekannt sein sollte. Bei jedem der Typen gibt es separate Strategien, die wesentlich schneller zum Ziel führen als unstrukturiertes Vorgehen. Bei den „typischen Strickmustern“ handelt es sich z. B. um:

- Einfache und doppelte Dreisätze
- Prozentrechnungen und „Vermischungsaufgaben“
- Wachstumsraten
- Zeitstrahlaufgaben
- Reine Rechenaufgaben (Zahlen in vorgegebene Formel einsetzen und Ergebnis berechnen)

TIPP

Da du bei der Bearbeitung keinen Taschenrechner verwenden darfst, muss auf Kopfrechnen und schriftliches Berechnen zurückgegriffen werden. Zur Auffrischung findest du im folgenden „Exkurs“ eine Wiederholung.

EXKURS – Schriftliches Rechnen

Addieren:
Beim schriftlichen Addieren geht man folgendermaßen vor:

1. Schreibe die einzelnen Summanden untereinander. Dabei müssen Einer- (hier: 7 und 9), Zehner- (hier: 1 und 9), Hunderter- (hier: 5 und 2) und Tausenderstellen (hier: nur 3) usw. direkt untereinanderstehen.

Beispiel: 3517 + 299 = ?

$$\begin{array}{r} 3517 \\ +\ \underline{\ 299} \end{array}$$

Bei diesem Beispiel könnte man auch 3517 + 300 – 1 rechnen. Ziel ist, sich für den schnellsten und sichersten Weg zu entscheiden.

LESEPROBE

2. Addiere die einzelnen Einer-, Zehner- usw. -stellen miteinander. Immer wenn die Summe größer ist als 10, schreibt man die Zehnerstelle als kleine Zahl an den Strich („1 gemerkt“). Diese Zahl wird im nächsten Schritt mit addiert. All dies gilt auch für Zahlen nach dem Komma.

Beispiel: 3517 + 299 = ?

```
  3517   → 7 + 9 = 16 bzw. 6 und „1 gemerkt“
+  299   → 1 + 9 + 1 = 11 bzw. 1 und „1 gemerkt“
  ¹¹
  3816   → 5 + 2 + 1 = 8
         → 3 + 0 = 3
```

Subtrahieren:

Das schriftliche Subtrahieren erfolgt prinzipiell nach denselben Abläufen wie das schriftliche Addieren, nur dass das „1 gemerkt“ durch ein „1 geklaut“ ersetzt wird. Man geht dabei folgendermaßen vor:

1. Schreibe erneut die Zahlen untereinander. Achte darauf, dass gleiche Stellen direkt untereinanderstehen.

Beispiel: 3517 - 299 = ?

```
  3517
-  299
```

Bei diesem Beispiel könnte man auch 3517 – 300 + 1 rechnen. Ziel ist, sich für den schnellsten und sichersten Weg zu entscheiden.

2. Subtrahiere nun die einzelnen Stellen voneinander. Überall, wo dies nicht auf Anhieb möglich ist, weil der Minuend (oben) kleiner ist als der Subtrahend (unten) muss eine „Eins“ von der benachbarten Stelle „geklaut“ werden. Statt 7–9 rechnet man dann 17–9. Die „geklaute Eins“ vermerkt man wieder unten auf dem Strich. Sie wird zum Subtrahenden (untere Zahl) hinzuaddiert. Die Ergebnisse der „kleinen Rechnungen“, also 17–9 müssen immer positiv sein! Daher muss man 17–9 statt 7–9 verwenden.

Beispiel: 3517 - 299 = ?

```
  3517   → 17 - 9 = 8 und „1 geklaut“
-  299   → 11 - 9 - 1 = 1 und „1 geklaut“
  3218   → 5 - 2 - 1 = 2
         → 3 - 0 = 3
```

Multiplizieren:

Im Gegensatz zum schriftlichen Addieren und Subtrahieren schreibt man die einzelnen Faktoren hier nicht untereinander, sondern nebeneinander. Die Unterergebnisse müssen danach addiert werden, sodass hier eine Kombination aus Malrechnen und Plusrechnen entsteht. Man geht folgendermaßen dabei vor:

1. Schreibe die Faktoren nebeneinander auf den Strich. Schreibe den Faktor mit der geringeren Anzahl an Stellen rechts. (128 · 14 ist dasselbe wie 14 · 128)

Beispiel: 128 · 14 = ?

```
128 · 14 =
```

2. Betrachte den Faktor mit der geringsten Anzahl an Stellen und multipliziere nun jede einzelne dieser Stellen (1 und 4) mit dem Faktor 1. Ob du vorne mit der Zehnerstelle oder hinten mit der Einerstelle beginnen ist dir überlassen. Es muss nur darauf geachtet werden, dass die Teilergebnisse korrekt untereinandergeschrieben werden.

Beispiel: 128 · 14 = ?

```
128 · 14 =
  128
  512
```

LESEPROBE

Bei diesem Beispiel könnte man auch rechnen:
128 · 10 = 1280
128 · 5 = 640
640 − 128 = 512 (entspricht 4 · 128)
1280 + 512 = 1792
Addiere die Teilergebnisse.

Beispiel: 128 · 14 = ?

128 · 14 = 1792
128
+ 512
1792

Mit mehr als zwei Faktoren zu rechnen, ist zu vermeiden, da die Rechnung zu unübersichtlich wird.
Statt $F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 = E_{final}$ besser:
erst $F_1 \cdot F_2 = E_1$, dann $E_1 \cdot F_3 = E_{final}$.

Dividieren:
Das schriftliche Dividieren erfolgt schrittweise durch Teildivisionen. Dabei geht man so vor:

1. Schreibe Dividend (das ist die Zahl, die geteilt wird) und Divisor (das ist die Zahl, *durch* die geteilt wird) nebeneinander auf.

Beispiel: 490 : 28 = ? 490 : 28 =

2. Nun folgen die Teildivisionen so lange, bis
   a) ein fertiges, rundes Ergebnis entsteht (Rest = 0)
      oder
   b) du die Rechnung abbrichst, entweder weil ein Teil nach dem Komma als Periode immer wieder auftaucht
      oder
   c) du ausreichend weit gerechnet hast und die restlichen Nach-Komma-Stellen zu vernachlässigen sind. Die Anzahl der relevanten Nach-Komma-Stellen ist von Aufgabe zu Aufgabe verschieden und richtet sich u. a. an den vorgegebenen Antwortmöglichkeiten.

Bei den Teildivisionen beginnt man vorne am Dividend. Da das Ergebnis kleiner ist als der Divisor, muss die nächste Stelle im Dividend übernommen werden. Dabei ist zu beachten, dass 490 dasselbe ist wie 490,000 … Nach der Übernahme der Einerstelle folgen daher die Nach-Komma-Stellen. Achte wieder auf eine präzise Schreibweise. Im Eifer des Gefechts können sonst Rechenfehler unterlaufen. Da es Punkte nur auf das richtige Ergebnis gibt, wäre das sehr ärgerlich.

Beispiel: 490 : 28 = ?

490 : 28 = 17,5
- 28
210
- 196
140
- 140
0

Übungen zum schriftlichen Berechnen findest du in Form von Arbeitsblättern im Anschluss an dieses Kapitel.

LESEPROBE

Übungsset 1

Lösen Sie die folgenden quantitativen und formalen Probleme.
(50 Min. für 20 Aufgaben)

1. Eine seltene tödliche Krankheit entsteht in einem Viertel aller Fälle durch Erreger A und in drei Viertel aller Fälle durch Erreger B. Unter 100.000 Todesfällen in einem Land waren 200 Menschen, die an jener Krankheit gestorben sind, die also entweder Erreger A oder Erreger B trugen.

   Wie groß ist der Anteil der Toten mit Erreger B?

   A) 11,5 Prozent
   B) 1,5 Prozent
   C) 1,1 Prozent
   D) 0,2 Prozent
   E) 0,15 Prozent

2. Sie haben vier Liter einer Flüssigkeit mit 30 °C vor sich. Diese Flüssigkeit erhitzen Sie nun durch Hinzugabe von weiteren zwei Litern auf eine Temperatur von 50 °C.

   Welche Temperatur hat die hinzugegebene Flüssigkeit?

   A) 70 °C
   B) 10 °C
   C) 100 °C
   D) 90 °C
   E) 35 °C

3. Ein Zahnarzt möchte in einigen Jahren aufhören zu arbeiten, jedoch sind seine Geräte veraltet. Nun stellt sich die Frage, ob es sich lohnt, noch einmal neue Behandlungsstühle mit allen damit verbundenen Gerätschaften anzuschaffen. Für solche Investitionsentscheidungen bietet sich die Berechnung der Amortisationszeit an, die Auskunft darüber gibt, wann sich eine Investition durch die resultierenden Gewinne selbst abbezahlt hat. Die Formel hierzu lautet:

$$\text{Amortisationszeit} = \frac{\text{Anschaffungsausgabe}}{\text{Durchschnittlicher Rückfluss pro Zeiteinheit}}$$

   Nach wie vielen Jahren hätte sich eine Investition von 29.520 € amortisiert, wenn dadurch der jährliche Gewinn der Praxis von ursprünglich 150.000 € um 6,4 % steigt und Wartungskosten von 1.400 € jährlich hinzukommen?

   A) Nach 2,7 Jahren
   B) Nach 4,1 Jahren
   C) Nach 5,4 Jahren
   D) Nach 3,6 Jahren
   E) Nach 6,2 Jahren

LESEPROBE

4. Eine Lösung entsteht durch das Mischen von Calciumcarbonat ($CaCO_3$) und Natriumchlorid (NaCl). Es werden 3,4 Liter $CaCO_3$-Lösung mit fünfzehn Volumenprozent $CaCO_3$ verwendet. Dazu werden 1.600 Milliliter NaCl-Lösung mit dreißig Volumenprozent NaCl gegeben.

   Welche Ionen-Konzentration weist die finale Lösung auf?

   A) 19,8 Volumenprozent
   B) 20,0 Volumenprozent
   C) 21,3 Volumenprozent
   D) 22,8 Volumenprozent
   E) 23,0 Volumenprozent

5. In einem Krankenhaus werden 1.050 Einweghandschuhe in 7 Tagen verbraucht.

   Wie lange kann man dort mit 1.350 Einweghandschuhen auskommen?

   A) 4,5 Tage
   B) 9,0 Tage
   C) 6,0 Tage
   D) 7,5 Tage
   E) 10,5 Tage

6. Unter der sog. Coulomb-Barriere versteht man das Potenzial, das ein positiv geladenes Teilchen überwinden muss, um in einen (ebenfalls positiv geladenen) Atomkern zu gelangen. Zur annäherungsweisen Berechnung der Coulomb-Barriere V_C (in MeV) lässt sich folgende Formel heranziehen:

$$V_C = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{A^{1/3}}$$

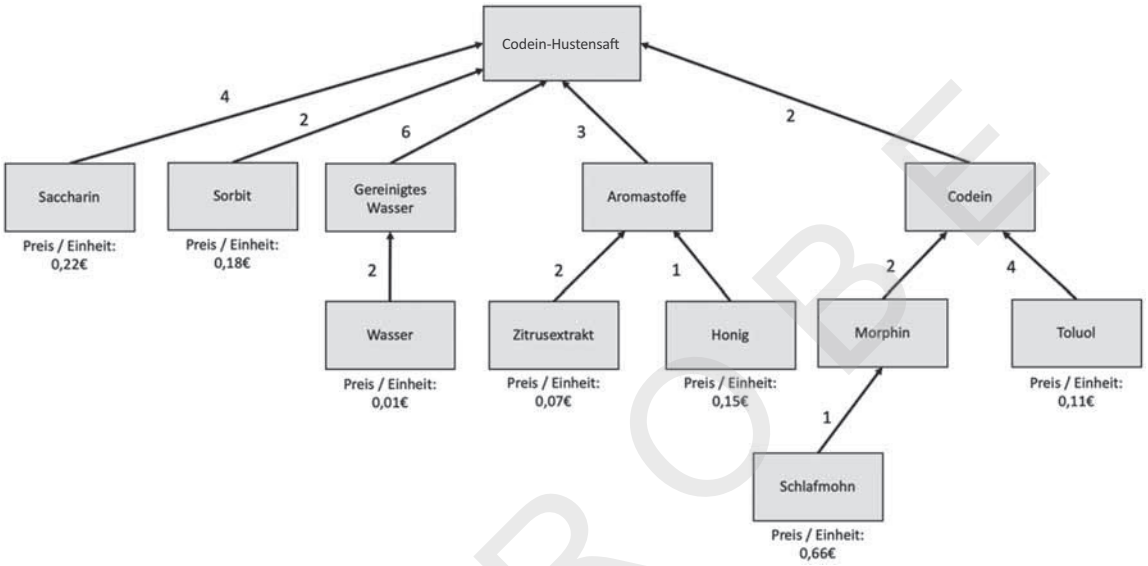
   Z_1 und Z_2 entsprechen den Kernladungszahlen von Projektil und Target, A der Massezahl des Targets.

   Wie hoch ist demnach die Coulomb-Barriere bei einem Beschuss von Aluminium (Kernladungszahl 13 und Massenzahl 27) mit einem Proton (Kernladungszahl 1)?

   A) 3,25 MeV
   B) 4,33 MeV
   C) 5,66 MeV
   D) 1,75 MeV
   E) 7,125 MeV

LESEPROBE

7. Eine Medizin-Professorin möchte für ein Experiment codeinhaltigen Hustensaft herstellen, sie weist ihre Assistenten deshalb an, folgendem Gozintographen zu folgen, um für sie eine Flasche des Hustensafts herzustellen. Der Gozintograph führt auf, wie die verschiedenen Inhaltsstoffe mengenmäßig verflochten sind. Die Knoten bezeichnen die Inhaltsstoffe, und die gerichteten Kanten geben an, wie viele Einheiten eines Inhaltsstoffs für die Herstellung einer Einheit eines nachgelagerten Inhaltsstoffs benötigt werden.



Die Professorin lässt die etwas tollpatschigen Assistenten mit ihrer Kreditkarte die Inhaltsstoffe bestellen, und nachdem diese ihr die fertigen Hustensaftflaschen präsentieren, fällt ihr auf der Abrechnung auf, dass die Assistenten nur 2,23 € anstatt wie eingeplant 5,75 € ausgegeben haben.

Welchen Inhaltsstoff haben sie demnach im Hustensaft vergessen?

A) Saccharin
B) Gereinigtes Wasser
C) Sorbit
D) Codein
E) Aromastoffe

8. Zwei Bakterienkulturen werden auf einem Nährboden inkubiert. Die Bakterien der Kultur A teilen sich alle 2 Minuten, die der Kultur B alle 1,5 Minuten. Kultur B wird jedoch erst 60 Sekunden später auf den Nährboden entlassen. Beide Kulturen beinhalten zu Anfang die identische Anzahl Bakterien.

Um wie viel Prozent hat Kultur A in dem Moment zugenommen, in dem sie von Kultur B eingeholt wird?

A) 76 %
B) 150 %
C) 200 %
D) 133 %
E) 300 %

LESEPROBE

Zum Übungsset 1

1. Lösung: E

$\frac{200}{100.000} = 0{,}002$; $0{,}002 \cdot \frac{3}{4} = 0{,}0015 = 0{,}15$ Prozent

2. Lösung: D

$2/3 \cdot 30 + 1/3 \cdot x = 1 \cdot 50$; $20 + 1/3 \cdot x = 50$; $x = 90$

3. Lösung: D

$(150.000 \cdot 0{,}064) = 9.600$ € zusätzlicher Gewinn – 1.400 € zusätzliche Ausgaben = 8.200 €
→ 29.520 ÷ 8.200 = 3,6 [Jahre]

4. Lösung: A

$1.600 \text{ ml} \cdot 30\,\% + 3.400 \text{ ml} \cdot 15\,\% = 990$; $\frac{990 \text{ ml}}{1.600 \text{ ml} + 3.400 \text{ ml}} = 19{,}8\,\%$

5. Lösung: B

Dreisatz: 1050 ÷ 7 = 150; 1350 ÷ x = 150; x = 9

6. Lösung: B

$\frac{1 \cdot 13}{\sqrt[3]{27}} = 13 \div 3 = 4{,}3333$ [MeV]

7. Lösung: D

Da nur 2,23 € anstatt 5,75 € ausgegeben wurden, wissen wir, dass der Inhaltsstoff 5,75 € – 2,23 € = 3,52 € kosten muss. Die zur Wahl stehenden Inhaltsstoffe sind all jene auf der Aggregationsebene unter Codein-Hustensaft, das heißt, wir müssen die Preise für die Inhaltsstoffe auf dieser Ebene berechnen, um den Inhaltsstoff zu finden, der genau 3,52 € kostet. Da 3,52 € über die Hälfte des eigentlichen Gesamtbetrags ausmachen, können wir intuitiv direkt mit den teureren Inhaltsstoffen anfangen. In diesem Fall würde es sich deshalb anbieten, Codein zuerst zu berechnen. Für einen Codein-Hustensaft benötigen wir zwei Einheiten Codein, dafür benötigen wir zwei Einheiten Morphin und dafür wiederum eine Einheit Schlafmohn, welcher 0,66 € kostet. Die Kosten für den Schlafmohn betragen also 2 · 2 · 1 · 0,66 € = 2,64 €. Für die 2 Einheiten Codein benötigen wir außerdem 2 · 4 Einheiten Toluol, was Kosten von 2 · 4 · 0,11 = 0,88 € verursacht. 2,64 € + 0,88€ = 3,52 €. Demnach haben die Assistenten Codein vergessen.

8. Lösung: E

Zeitstrahl 0 | 0,5 | 1 |1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 | 5,5 | 6 | Minuten

A I I I I
B I I I I

Zwei Verdopplungen von A, bis B sie einholt, also + 300 %

9. Lösung: A

200 ml Medikament-Lösung enthalten 1/5 T; 200 ml Glucose-Lösung enthalten 1/5 Y; mit 100 ml Wasser sind es insgesamt 500 ml Flüssigkeit, die 1/5 T und 1/5 Y enthalten. Davon sind 100 ml, also 1/5, zu entnehmen → führt zu 1/25 T und 1/25 Y in den entnommenen 100 ml

10. Lösung: B

2 % von 1,5 ‰ = 0,03 ‰; 3 % von 1,5 ‰ = 0,045 ‰; 95 % von 1,5 ‰ = 1,425 ‰; 1,425 – 15 %
→ es werden 0,21375 Promille weniger abgebaut; 0,21375 ÷ 1,5 = 0,21375 · (1/1,5) =
0,21375 · 0,66 = 0,1425 = 14,25 %

LESEPROBE